



TITLE:

固定費つき取引コスト関数をもつ 最適資産配分問題の解法 (最適化手 法の深化と広がり)

AUTHOR(S):

河野, 将希; 福嶋, 雅夫

CITATION:

河野, 将希 ...[et al]. 固定費つき取引コスト関数をもつ最適資産配分問題の解法 (最適化手法の深化と広がり). 数理解析研究所講究録 2012, 1773: 57-67

ISSUE DATE:

2012-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171714>

RIGHT:

固定費つき取引コスト関数をもつ最適資産配分 問題の解法

京都大学大学院 情報学研究科

河野 将希 (Masaki Kono), 福嶋 雅夫 (Masao Fukushima)
Graduate School of Informatics, Kyoto University

1 はじめに

本論文では Markowitz によって提案された平均・分散モデル [3] に基づき, 固定費付き取引コストを取引の収支に含め, 資産配分の分散や予算などの制約の下でのリターンの期待値の最大化を図る資産配分問題を考える. 固定費付き取引コスト関数は原点で不連続となり, それ以外の区間では線形な関数で表わされる. このような問題は凸計画問題ではないので, 大域的最適解を求めるのは一般に困難である. そこで良い近似解を簡便に得ることを目的として, 本論文では近似解法を提案する. さらに数学的な議論や実際のデータに基づいた数値実験により, 提案した手法の性質や有効性を検証する.

本論文の構成を以下に記す. まず 2 節では本論文で扱う資産配分問題を定義し, とくにその問題の制約条件を説明する. 3 節では, 本論文で提案する解法を示す. 4 節の数値実験で, 今回提案する解法を従来手法である凸近似反復法 [2] と比較し, 結果から分かる性質について考察する. 最後に 5 節で結論を述べる.

2 資産配分問題

n 個の資産の集合を $I := \{1, \dots, n\}$ と表す. 資産配分は資産の取引によって行われ, 取引後ある一定期間この資産配分は保持される. 投資者の目的は資産配分の制約を満たしつつ期末の資産価格 (以下これをリターンと呼ぶ) の期待値を最大にすることである. 一般に制約としてはリターンの分散などのリスクの許容限度や, 各資産の保有量の上限, 下限などが考えられる.

現在保有する n 個の資産の量を $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\top$ で表わす. 資産量の総和は, 全ての要素が 1 であるベクトル $\mathbf{1} \in \mathbf{R}^n$ を用いて $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}$ で表される. 次に, 資産の取引量を $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ で表す. 資産 i を購入したのであれば $x_i > 0$, 売却したのであれば $x_i < 0$ である. 取引後の資産量は $\mathbf{w} + \mathbf{x}$ となる.

2.1 取引コスト関数と予算制約

取引量 \mathbf{x} にまつわるすべての取引コストの総和を $\phi(\mathbf{x})$ とすると、予算制約として以下の式を得る.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (1)$$

以下では、取引コスト関数 $\phi(\mathbf{x})$ は分離可能、つまり

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i)$$

と表せるものとし、取引コスト関数は定数 $\beta_i^+ \geq 0$, $\beta_i^- \geq 0$, $\alpha_i^+ \geq 0$, $\alpha_i^- \geq 0$ を用いて

$$\phi_i(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i = 0 \\ \beta_i^+ + \alpha_i^+ x_i, & x_i > 0 \\ \beta_i^- - \alpha_i^- x_i, & x_i < 0 \end{cases}$$

で与えられると仮定する (図 1). とくに、取引がなければコストはかからないことに注意する. この関数は下半連続であるので、式 (1) を満たすベクトル \mathbf{x} の集合は閉集合となる.

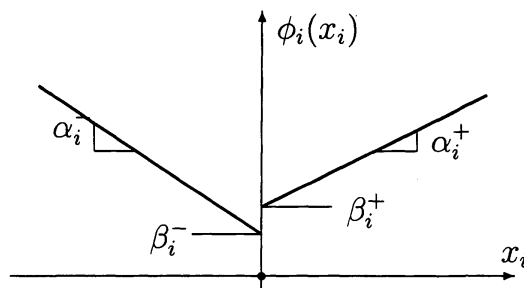


図 1: 固定費つき取引コスト関数 $\phi_i(x_i)$

以下では、簡単のため $\beta_i^+ = \beta_i^-$, $\alpha_i^+ = \alpha_i^-$ とする. つまり、関数 $\phi_i(x_i)$ は定数 $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ を用いて

$$\phi_i(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i = 0 \\ \beta_i + \alpha_i |x_i|, & x_i \neq 0 \end{cases}$$

と表されると仮定する.

2.2 資産保有量の上限に関する制約

資産保有量の上限に関する制約は資産 i の保有可能量の最大値を p_i とすれば、以下の線形不等式で表される.

$$w_i + x_i \leq p_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

2.3 空売り制約

空売りに対する制約もまた線形不等式であり、資産 i に許された空売りの最大量を $s_i \geq 0$ とすると

$$w_i + x_i \geq -s_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

で表される。もし空売りが許されていないならば、 $s_i = 0$ である。

2.4 分散に関する制約

資産 i のリターンは確率変数であり、これを a_i で表す。E を期待値を表わす演算子とする。いま、 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ の結合分布の一次および二次のモーメント

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{a} &= \bar{\mathbf{a}} \\ \mathbf{E}(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})^\top &= \Sigma \end{aligned}$$

は既知と仮定する。リスクのない資産が存在する可能性もあり、そのような資産 i については \bar{a}_i は確実なリターンであり、 $(\Sigma)_{ii} = 0$ となる。ただし $(\cdot)_{ii}$ は行列の (i, i) 成分を表わす。

期末の資産量は確率変数 $W = \mathbf{a}^\top(\mathbf{w} + \mathbf{x})$ であり、その期待値と分散は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W &= \bar{\mathbf{a}}^\top(\mathbf{w} + \mathbf{x}) \\ \mathbf{E}(W - \mathbf{E}W)^2 &= (\mathbf{w} + \mathbf{x})^\top \Sigma (\mathbf{w} + \mathbf{x}) \end{aligned}$$

よって期末の資産量 W の分散が σ_{\max}^2 以下でなければならないという制約条件は以下の二次不等式によって与えられる。

$$(\mathbf{w} + \mathbf{x})^\top \Sigma (\mathbf{w} + \mathbf{x}) \leq \sigma_{\max}^2 \quad (2)$$

行列 Σ は半正定値であるから、これは凸な制約である。

2.5 資産配分問題

予算制約式 (1) 以外の制約条件をまとめて

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \mid -\mathbf{s} \leq \mathbf{w} + \mathbf{x} \leq \mathbf{p}, (\mathbf{w} + \mathbf{x})^\top \Sigma (\mathbf{w} + \mathbf{x}) \leq \sigma_{\max}^2\}$$

と表す。ただし $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)^\top$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^\top$ である。 \mathcal{S} は凸集合であることに注意する。そのとき、資産配分問題 P は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \bar{\mathbf{a}}^\top(\mathbf{w} + \mathbf{x}) \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \\ &\quad \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

ここで,

$\bar{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^n$ 各資産のリターンの期待値のベクトル

$\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ 現在の各資産量のベクトル

$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 各資産の取引量のベクトル

$\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 取引コスト関数

であり, とくに資産 n は“現金資産”とする. よって $(\Sigma)_{nn} = 0, \bar{a}_n = 1$ である. さらに, 資産 n は取引コストがかからない ($\alpha_n = \beta_n = 0$) と仮定する.

問題 P の解は疎 (つまり解のベクトルにおける非零要素が少ない) になる傾向があることが知られている. 実際, 多くの種類の資産を取引すればそれだけ多くの固定費がかかり非効率的であるので, 少数の資産の取引を行うのがよいと考えるのは合理的である.

3 解法

この節では資産配分問題 P の近似解法を提案する. まず, 各 i に対して, 関数 ϕ_i^b を

$$\phi_i^b(x_i) := \beta_i + \alpha_i |x_i|$$

で定義する. さらに, 任意の添字集合 $T \subseteq I$ に対して次式で定義される問題 $P(T)$ を P の凸制限問題と呼ぶ.

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \bar{\mathbf{a}}^\top (\mathbf{w} + \mathbf{x}) \\ & \text{subject to} && \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \sum_{i \in T} \phi_i^b(x_i) \leq 0 \\ & && \mathbf{x} \in \mathcal{S}, x_i = 0 \ (i \notin T) \end{aligned}$$

問題 P の最適解 \mathbf{x}^* に対して

$$I^* := \{i | x_i^* \neq 0\}$$

を定義すると, \mathbf{x} は凸制限問題 $P(I^*)$ の最適解である. つまり, 最適解 \mathbf{x}^* を求めるには最適資産集合 I^* を求めればよい. しかし現実には I^* を求めることは困難なため, I^* を近似した集合 \tilde{I} を求め, $P(\tilde{I})$ の最適解を近似解とすることを考える. 資産配分問題 P では解が疎になる傾向があるので, $I^0 \supseteq I^*$ と考えられる初期取引資産集合 I^0 から始めて

$$I^0 \supset I^1 \supset I^2 \supset \dots \supset I^k$$

となるような集合 I^k を順次生成していけば, I^k は I^* に近づくと期待できる.

以下, 3.1 節で I^0 を求めるための凸緩和問題を定義し, 3.2 節で I^k から I^{k+1} を生成するために用いるシグモイド近似問題を定義する. さらに 3.3 節で提案手法のアルゴリズムについて述べる.

3.1 凸緩和問題

この節では、資産配分問題 P の実行可能領域を凸集合で緩和した問題を定式化する．そのため集合 \mathcal{S} において取引コスト関数 $\phi_i(x_i)$ を下から近似する凸関数を構成する．まず，

$$\mathcal{S}_{\text{rec}} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid -\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\} \supseteq \mathcal{S} \quad (3)$$

を満たす直方体集合 \mathcal{S}_{rec} を定義する．ただし $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)^\top$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$ はそれぞれその第 i 成分が $l_i := \inf\{x_i \mid \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$, $u_i := \sup\{x_i \mid \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$ で定義されるベクトルである．簡単のため l_i, u_i は $-l_i < 0 < u_i$ を満たすと仮定し，

$$\beta_i^u := \begin{cases} \beta_i/u_i & (u_i < +\infty) \\ 0 & (u_i = +\infty) \end{cases}, \quad \beta_i^l := \begin{cases} \beta_i/l_i & (l_i < +\infty) \\ 0 & (l_i = +\infty) \end{cases}$$

を用いて関数

$$\phi_i^{\text{c.e.}}(x_i) = \begin{cases} (\beta_i^u + \alpha_i)x_i, & x_i \geq 0 \\ -(\beta_i^l + \alpha_i)x_i, & x_i < 0 \end{cases}$$

を定義する． $\phi_i^{\text{c.e.}}(x_i)$ は区間 $[l_i, u_i]$ 上で ϕ_i を下から近似する凸関数であることがわかる (図 2)．これを $\phi_i(x_i)$ の凸包関数と呼ぶ．

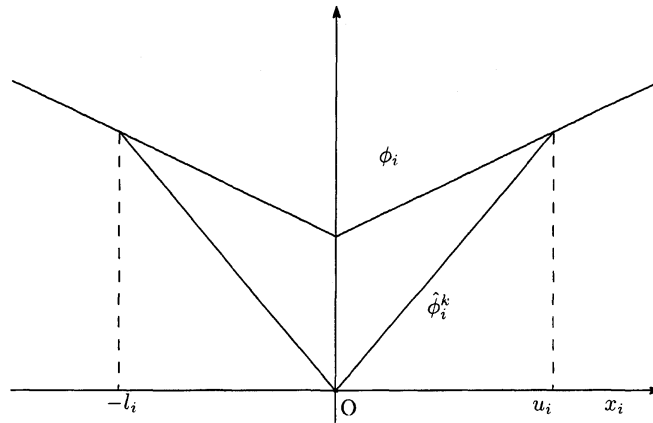


図 2: 関数 $\phi_i^{\text{c.e.}}(x_i)$

さらに，資産配分問題 P において ϕ_i を $\phi_i^{\text{c.e.}}$ で置き換えた問題 $P_{\text{c.r.}}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \bar{\mathbf{a}}^\top (\mathbf{w} + \mathbf{x}) \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \phi_i^{\text{c.e.}}(x_i) \leq 0 \\ & \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

問題 P と問題 $P_{\text{c.r.}}$ の実行可能領域はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_o &:= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i) \leq 0\} \cap \mathcal{S} \\ \mathcal{S}_{\text{c.r.}} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \phi_i^{\text{c.e.}}(x_i) \leq 0\} \cap \mathcal{S} \end{aligned}$$

と表され,

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i) \leq 0\} \cap \mathcal{S}_{\text{rec}} \\ & \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \phi_i^{\text{c.e.}}(x_i) \leq 0\} \cap \mathcal{S}_{\text{rec}} \end{aligned}$$

と式 (3) から

$$\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_{\text{c.r.}}$$

を得る. つまり, 問題 $P_{\text{c.r.}}$ の実行可能領域は問題 P の実行可能領域を含んでいる. さらに $\mathcal{S}_{\text{c.r.}}$ は凸集合であるので, 問題 $P_{\text{c.r.}}$ は元の問題 P の実行可能領域を凸緩和したものとなすことができる. 以下では, 問題 $P_{\text{c.r.}}$ を問題 P の凸緩和問題と呼ぶ. 凸緩和問題 $P_{\text{c.r.}}$ は凸計画問題であるので, 容易に解くことが可能であり, さらに, 凸緩和問題 $P_{\text{c.r.}}$ の最適値 $W_{\text{c.r.}}$ は元の問題 P の最適値 W_0 の上界値を与える.

凸緩和問題 $P_{\text{c.r.}}$ の最適解 $\mathbf{x}^{\text{c.r.}}$ において, 取引コスト制約を緩和しているにもかかわらず, ある成分が $|x_i^{\text{c.r.}}| < \epsilon_i$ (ただし ϵ_i はある十分小さい非負の数) を満たすとする. このとき, 実際に資産 i の取引を行う際には, 取引量に比べて大きい固定費がかかるため, この取引は非効率であると判断できる. よって緩和していない元の問題 P においてこのような資産は取引されることはないと推測できる. 以上の議論から, 初期取引資産集合を

$$I^0 := \{i : |x_i^{\text{c.r.}}| \geq \epsilon_i\}$$

と定める.

3.2 シグモイド近似問題

この節では, $I^{k+1} \subset I^k$ であるような I^{k+1} を得る方法について述べる. 凸制限問題 $P(I^k)$ の最適解 \mathbf{x}^k が得られていると仮定する. まず, シグモイド関数

$$\varsigma(x; g) := 2/(1 + e^{-gx}) - 1$$

を用いて各 i に対して関数

$$\hat{\phi}_i^k(x_i) := \beta_i \varsigma(|x_i|; g_i^k) + \alpha_i |x_i| \quad (4)$$

を定義する (図 3). g_k はシグモイド関数の傾きを決定するパラメータであり, ゲインと呼ばれる. $\hat{\phi}_i^k(x_i)$ は $\phi_i(x_i)$ を連続関数で近似したものであり, シグモイド関数 $\varsigma(x; g)$ の微分は

$$\varsigma'(x; g) = \frac{g}{2} (1 + \varsigma(x; g))(1 - \varsigma(x; g))$$

と表せるので, $\hat{\phi}_i^k(x_i)$ の勾配を簡単に計算することができる. 関数 $\hat{\phi}_i^k(x_i)$ を用い

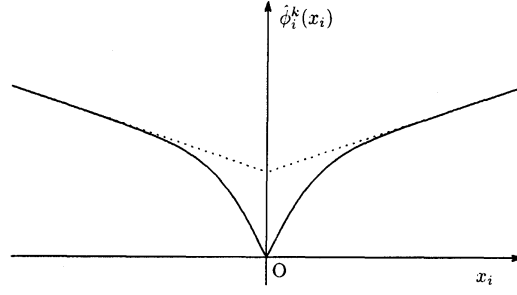


図 3: 関数 $\hat{\phi}_i^k(x_i)$

てシグモイド近似問題 $P_s(I^k, \mathbf{x}^k)$

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \bar{\mathbf{a}}^\top (\mathbf{w} + \mathbf{x}) \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \sum_{i \in I^k} \hat{\phi}_i^k(x_i) \leq 0 \\ & \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}, \quad x_i = 0 \quad (i \notin I^k) \\ & \quad \sum_{i \in I^k} \frac{|x_i|}{|x_i^k|} \leq |I^k| - \delta \end{aligned}$$

を定義し、その解 $\hat{\mathbf{x}}$ を用いて I^{k+1} を定義することを考える。ただし δ はある正数、 $|I^k|$ は集合 I^k の要素数である。いま、

$$\sum_{i \in I^k} \frac{|x_i|}{|x_i^k|} \leq |I^k| - \delta \quad (5)$$

の左辺に \mathbf{x}^k を代入すると

$$\sum_{i \in I^k} \frac{|x_i^k|}{|x_i^k|} = |I^k| > |I^k| - \delta$$

となるため、 \mathbf{x}^k は式 (5) の制約を満たさない。しかし、シグモイド近似問題 $P_s(I^k, \mathbf{x}^k)$ の解 $\hat{\mathbf{x}}$ は式 (5) を満たす必要があるため、少なくとも一つの $i \in I^k$ に対して $|\hat{x}_i| < |x_i^k|$ が成り立つ。このことから、

$$I^{k+1} := \left\{ i : |\hat{x}_i| > \max \left\{ \epsilon_i, \min_{i \in I^k} |\hat{x}_i| \right\} \right\} \quad (6)$$

と定義することによって $I^{k+1} \subset I^k$ なる I^{k+1} を得る。これは、決定変数 \mathbf{x} の ℓ_1 ノルムをある定数 c 以下とする制約

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq c$$

を加えることにより、得られる解に疎性を持たせる LASSO[4] と呼ばれる手法に対して、 ℓ_1 ノルムの代わりに重み付き ℓ_1 ノルム [1] を用いたものである。

3.3 アルゴリズム

提案手法アルゴリズム

Step 0. $k := 0$, $\delta := 0$, $W^* := -\infty$ とおき, $\epsilon_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) を選ぶ. 凸緩和問題 $P_{c.r.}$ の解を \hat{x} とし, $I^0 := \{i : |\hat{x}_i| > \epsilon_i\}$ とする.

Step 1. 凸制限問題 $P(I^k)$ の最適解を x^k , 最適値を W とし, $W < W^*$ もしくは $I^k = \emptyset$ ならば Step 3 へ進む. そうでないならば $\delta := |I^k|/n$, $x^* := x^k$, $W^* := W$ として Step 2 へ進む.

Step 2.

Step 2-1. $i \in I^k$ に対して g_i^k を定め,

$$\hat{\phi}_i^k(x_i) := \beta_i \varsigma(|x_i|; g_i^k) + \alpha_i |x_i|$$

とする. シグモイド近似問題 $P_s(I^k, x^k)$ を x^k を初期点として逐次二次計画法を用いて解き, 解が得られた場合はその解を \hat{x} として Step 2-2 へ進む. さもなくば Step 3 へ進む.

Step 2-2. 式 (6) によって I^{k+1} を定め, $k := k + 1$ として Step 1 へ戻る.

Step 3. x^* を出力して終了.

アルゴリズムの終了条件をまとめると,

1. Step 1 において凸制限問題の最適値 W が暫定最適値 W^* を下回る.
2. Step 1 において $I^k = \emptyset$ となる.
3. Step 2-1 においてシグモイド近似問題 $P_s(I^k, x^k)$ の解が得られない.

の三つとなる. このアルゴリズムが $k = k' + 1$ で終了したとき, 出力される解 x^* は凸制限問題 $P(I^{k'})$ の最適解であるから, 近似的な最適資産集合は $\tilde{I} = I^{k'}$ として得られる.

4 数値実験

この節では, 前節で提案した方法に対して実際に計算機を用いて数値実験を行った結果を示す. 実験は CPU が 2.27GHz の Core i5, メモリが 4.0GB の計算機上

で行い、アルゴリズムはMATLAB7.10.0を用いて実装した。問題に含まれるパラメータを

$$\begin{aligned} w_1, \dots, w_n &= 1/n \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} &= 0.01, \quad \alpha_n = 0 \\ s_1, \dots, s_{n-1} &= 0.005, \quad s_n = 0.5 \\ p_1, \dots, p_n &= 0.5 \\ \sigma_{\max} &:= 0.1 \end{aligned}$$

とし、 $n = 101, 501$ の場合に対して無作為に選んだ $n - 1$ 銘柄の株式に単位通貨の現金資産(分散0で $\bar{a}_n = 1$)を加えた n 個の資産からなる資産配分問題(2.5)を考えた。株式の収益の期待値や分散は2006年1月24日から2011年1月23日までの5年分の月間データを基に推定した。提案手法と凸近似反復法[2]によって得た資産配分問題の最適値を比較する。最適性の指標として、この資産配分問題の最適値の上界を与える凸緩和問題の最適値も比較対象とする。

今回の数値実験では提案アルゴリズム中のゲインパラメータ g_i^k は

$$\zeta'(x_i^k; g_i^k) = \zeta'(0; g_i^k)/2 \quad (7)$$

を満たすように定め、 $\epsilon_i = \beta_i$ とした。図4は

$$\beta_1, \dots, \beta_{100} = \beta, \quad \beta_{101} = 0$$

とした場合の β の変化に対する各手法の最適値の変化を表し、図5は

$$\beta_i = \beta |\bar{a}_i - 1| \quad (i = 1, \dots, 500), \quad \beta_{501} = 0$$

とした場合の β の変化に対する各手法の最適値の変化を表している。ただし、 \bar{a}_i は $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{E}\mathbf{a}$ の第 i 成分を表わす。また、実線は凸緩和問題、太実線は提案手法、点線は凸近似反復法の最適値を表す。

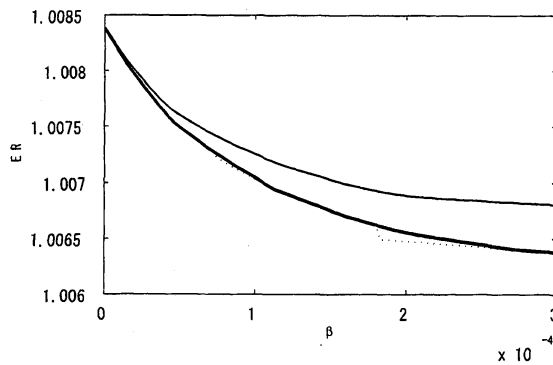


図 4: $n = 101$ における β の変化に対する最適値の変化

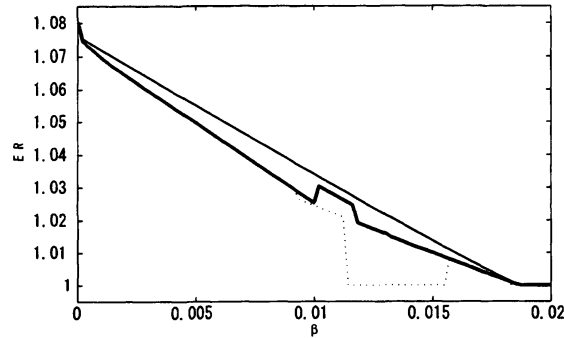


図 5: $n = 501$ における β の変化に対する最適値の変化

表 1: 平均計算時間の比較

手法 \ n	101	501
提案手法	約 4.28 秒	約 19.45 秒
従来手法	約 140 秒	約 234 秒

4.1 考察

以上の実験結果からわかるように、提案手法は既存の手法である凸近似反復法で得られる最適値を上回る最適値を与える。また、提案手法で得られた解の非零要素数は既存手法で得られる解の非零要素数以上であった。このことから、既存手法は本来取引に用いるべき資産を非取引資産と判断してしまう傾向があると解釈できる。しかし、提案手法と凸近似反復法はともにヒューリスティックな解法であるため、実験に用いるデータやパラメータによっては必ずしも提案手法が勝るとは限らない。計算時間で比較すると、提案手法は既存手法よりも短い計算時間で終了した。この理由の一つは提案手法が反復の度に解く部分問題 $P_s(I^k, x^k)$ の次元が小さくなるためであると考えられる。

5 おわりに

本論文では固定費付き取引コスト関数をもつ資産配分問題に対する解法を提案した。さらに、数値実験によってその解法を既存の解法と比較し、有効性を検証した。その結果、提案手法は今回の実験では既存の解法と比較して計算時間が短く、良い解が得られることが確認された。

また、今回扱った資産配分問題では取引コストに関する制約条件以外の制約条件が比較的単純であったので、より実際の資産配分問題に即した制約条件を取り入れた問題を定式化し、その問題に対する有効な解法を提案すること、圧縮センシングなどの不連続関数をもつ問題に適用することなどが課題として挙げられる。

参考文献

- [1] Candes, E., Wakin, M. and Boyd, S.: Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Vol. 14 (2008), 877–905.
- [2] Lobo, M. S., Fazel, M. and Boyd, S.: Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs, *Annals of Operations Research*, Vol. 152 (2007), 341–365.
- [3] Markowitz, H.: Portfolio selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7 (1952), 77–91.
- [4] Tibshirani, R.: Regression shrinkage and selection via the lasso, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 58 (1996), 267–288.